Princípio Variacional ao caso não holônomo

Dado um sistema holonômo com $L(q, \dot{q}, t)$, de todos os caminhos possíveis no espaço de configuração que conectam dois pontos fixos, o caminho real descrito pelo sistema mecânico é tal de tornar a ação mínima.

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} \right) \right) \delta q_k = 0 \qquad (1)$$

Para um sistema não- holonômo, não é possível introduzir um conjunto de coordenadas generalizadas tal que as equações de vínculo estejam identicamente satisfeitas. Há algumas classes de vínculo não- holônomo, sendo a mais comum os vínculos lineares nas velocidades.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, \dot{q_k} + a_{lt} dt = 0 \quad , l = 1 \ldots, p \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk} \delta q_k = 0 \quad , l = 1, \ldots, p \qquad (2.1)$$

Onde a_{lk} e a_{lt} são funções somente de coordenadas $(q_1, \ldots., q_n)$. O sistema é descrito por *n* graus de liberdade e esta submetida a *p* vínculos diferenciais independentes. Na equação (2.1) o termo (δq_k) é o deslocamento virtual, ou seja, um deslocamento que ocorre a tempo fixo quando se executa a variação: $\bar{q}_k\ (t)\ = q_k(t) + \delta_k\ (t)$.

A partir da equação (2.1) podemos determinar um extremo condicionado para o funcional *J*, e como temos uma soma de zeros podemos iniciar o tratamento pelo método de multiplicadores de lagrange, onde as *n* variações $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ tem que satisfazer as *p* equações (2.1), de modo apenas *(n - p)* variações dos q's são independentes entre si.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{l=1}^{p} \lambda_l \sum_{k=1}^{n} a_{lk} \delta q_k = 0 \qquad (2.1.1)$$

Adicionando (1) e (2.1.1), temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} \right) + \sum_{l=1}^{p} \lambda_l a_{lk} \right\} \delta q_k = 0 \qquad (3)$$

Renumerando adequadamente as coordenadas especificamos que as *(n –p)* primeiras variações $\delta q_1, \ldots, \delta q_{n-p}$ são independentes e as p ultimas variações sejam determinadas em termos das independentes. Quanto aos multiplicadores de lagrange podemos defini-los de tal modo que as p ultimas variações sejam nulas, isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}\right) + \sum_{l=1}^{p} \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = n-p+1, \ldots., n \qquad (3.1)$$

Portanto as equações do movimento que só envolve os *(n - p)* primeiros δq ‘s do sistema são:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{p} \lambda_l a_{lk} \ , \quad k = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

Exemplos

1. Considere uma moeda de massa m e raio R que rola sem deslizar e sem tombar ao longo de uma mesa inclinada de inclinação α. Sejam *x,y* as coordenadas cartesianas do centro de massa da moeda.Sejam ϕ o ângulo de rotação da moeda em torno do seu eixo de simetria e θ e o ângulo do plano da moeda com o eixo *y* . Quais são as equações de movimento dessa moeda?

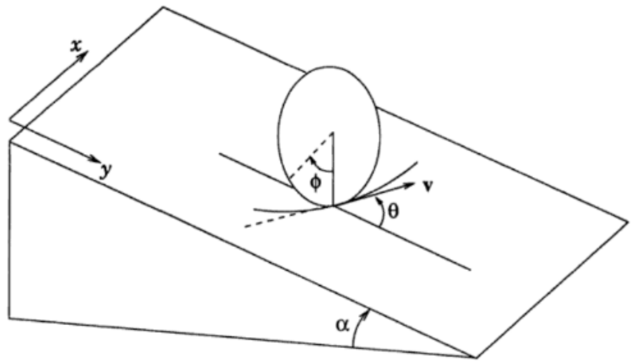

Figura 1- Moeda rolando sem deslizar num plano inclinado fixo.

A condição de rolamento sem deslizamento

$$v = R\dot{\varphi} \qquad (5)$$

Para obter a configuração dessa moeda num determinado momento precisamos saber as coordenadas do C.M (posição da moeda), o seu ângulo de rotação e a orientação dela em relação à y. Sejam *(x ,y)* as coordenadas do centro do disco as projeções $\boldsymbol{v}$ em e y dão as componentes $(\dot{x}, \dot{y})$

$$\dot{x} = v \sin\ \theta = R\dot{\varphi}\ \sin\theta \qquad (5.1)$$
$$\dot{y} = v\cos\theta = R\dot{\varphi}\cos\theta \qquad (5.2)$$

Considerando R constante a partir das equações acima, temos as equações de vinculo;

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\ \sin\theta = 0 \qquad (5.1.1)$$

$$\dot{y} = -R\dot{\varphi}\cos\theta = 0 \qquad (5.2.1)$$

Verificar se o vinculo é holônomo:

Um vinculo é semi holônomo se existir uma função $F(x, y, \theta, \varphi, t)$ tal que ,

$$0 = \dot{x} - R\dot{\varphi}\ \sin\theta = \frac{dF}{dt} \qquad (5.1.1a)$$

Ou seja se ela for integrável, ou se existir uma função
$\mu(x, y, \theta, \varphi)\ \ e\ F(x, y, \theta, \varphi, t)$, onde chamamos μ de fator integrante (para que seja verdade o fator tem que ser diferente de zero), tal que :

$$\mu\dot{x} - \mu R\dot{\varphi}\ \sin\theta = \frac{dF}{dt} \qquad (5.1.1b)$$

$$\mu\dot{x} - \ \mu R\dot{\varphi}\ \sin\theta = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dt} \qquad (5.1.1c)$$

$$\mu\dot{x} - \ \mu R\dot{\varphi}\ \sin\theta = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (5.1.1d)$$

Comparando (5.1.1d) e (5.1.1), temos que $\mu(x, \theta, \varphi)$. Utilizando igualdade das derivadas cruzadas a fim de descobrir o valor de μ.

$$\frac{\partial F^2}{\partial t \partial x} = \frac{\partial F^2}{\partial x \partial t} = 0 \rightarrow \mu(x, \theta, \varphi\ ) \qquad (5.1.1e)$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial x \partial \varphi} = \frac{\partial F^2}{\partial \varphi \partial x} = 0 \rightarrow \mu(\theta, \varphi\ ) \qquad (5.1.1f)$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial \theta \partial \varphi} = \frac{\partial F^2}{\partial \varphi \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\mu R\cos\theta) = -\mu R\sin\theta = 0 \qquad (5.1.1g)$$

Portanto $\mu = 0$. Logo o vínculo não é holônomo. O mesmo ocorre para a equação (5.2.1) e para ambas.

Podemos observar que os vínculos – equações (5.1) e (5.2)- são lineares nas velocidades, portanto a fim de resolver o exercício usaremos a equação (4). Para resolver o lado direito usaremos as equações de vínculos, mas para resolver o lado esquerdo precisamos definir a lagrangeana do sistema.

Logo,

$$L = T - V \tag{6}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{4} + \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{8} + mgy\sin\alpha \qquad (6.1.)$$

A energia cinética da moeda é a energia do centro de massa, mais a energia de translação do centro de massa acrescida da energia de rotação em torno do centro de massa

Resolvendo o lado esquerdo inicialmente :

Neste caso temos duas equações de vínculo portanto desenvolveremos a equação (2) para cada uma das equações de vinculo. Primeiramente temos que nomear as coordenadas generalizadas:$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \theta, q_4 = \varphi$

$$l = 1 \rightarrow equação\ (5.1.1)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{4} a_{lk}\,\dot{q_k} = a_{11}\dot{x} + a_{12}\dot{y} + a_{13}\dot{\theta} + a_{14}\dot{\varphi} \ \leftrightarrow\ \dot{x} - R\dot{\varphi}\sin\theta = 0$$

$$l = 2 \rightarrow equação\ (5.2.1()$$

$$0 = \sum_{k=1}^{4} a_{lk}\,\dot{q_k} = a_{21}\dot{x} + a_{22}\dot{y} + a_{23}\dot{\theta} + a_{24}\dot{\varphi} \ \leftrightarrow\ \dot{y} - R\dot{\varphi}\cos\theta = 0$$

Comparando devidamente as equações de vínculo temos os valores das funções arbitrarias a_{lk} .Sendo eles

$$a_{11} = 1 \rightarrow a_{21} = 0$$

$$a_{12} = 0 \rightarrow a_{21} = 1$$

$$a_{13} = 0 \rightarrow a_{23} = 0$$

$$a_{14} = -R\sin\theta \rightarrow a_{24} = \ -R\cos\theta$$

Portanto o lado esquerdo :

$$\sum_{l=1}^{2} a_{lk}\dot{q}_{k=}\ \lambda_1 - \lambda_1 R\sin\theta + \lambda_2 - \lambda_2 R\cos\theta$$

Resolvendo o lado direito (lagrangeana para cada uma das coordenadas generalizadas).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + mg\sin\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{mR^2\ddot{\omega}}{4} \rightarrow constante$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{mR^2\ddot{\varphi}}{2}$$

Escrevendo a equação completa por ordem das coordenadas generalizadas escolhidas acima, temos as equações de movimento usando multiplicadores

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \qquad (7)$$

$$m\ddot{y} - mg\sin\alpha = \lambda_2 \qquad (7.1)$$

$$\frac{mR^2\ddot{\theta}}{4} = 0 \rightarrow constante \qquad (7.2)$$

$$\frac{mR^2\ddot{\varphi}}{2} = -\lambda_1 R\sin\theta - \lambda_2 R\cos\theta \qquad (7.3)$$

Temos que eliminar os λ lembrando que : $\theta = \theta_0 + \Omega t$. Derivando a equação (5.1.1), temos

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} - R\dot{\varphi}\sin(\theta_0 + \Omega t) = \ddot{x} - (R\ddot{\varphi}\sin\theta + R\dot{\varphi}\Omega\cos\theta)$$

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi}\sin\theta + R\dot{\varphi}\Omega\cos\theta \qquad (8.1)$$

Substituindo (8.1) em (7)

$$mR\ddot{\varphi}\sin\theta + mR\dot{\varphi}\Omega\cos\theta = \lambda_1 \qquad (8.1.1)$$

Derivando (5.2.1)

$$\frac{d}{dt}(\dot{y} - R\dot{\varphi}\cos(\theta_0 + \Omega t) = \ddot{y} - (R\ddot{\varphi}\cos\theta - R\dot{\varphi}\Omega\sin\theta)$$

$$\ddot{y} = R\ddot{\varphi}\cos\theta - R\dot{\varphi}\Omega\sin\theta \qquad (8.2)$$

Substituindo (8.2) em (7.1)

$$mR\ddot{\varphi}\cos\theta - mR\dot{\varphi}\Omega\sin\theta - mg\sin\alpha = \lambda_2 \qquad (8.2.1)$$

Substituindo (8.1.1) e (8.2.1) em (7.3)

$$\frac{mR^2\ddot{\varphi}}{2} = -(mR\ddot{\varphi}\sin\theta + mR\dot{\varphi}\Omega\cos\theta)R\sin\theta - (mR\ddot{\varphi}\cos\theta - mR\dot{\varphi}\Omega\sin\theta - mg\sin\alpha)R\cos\theta$$

Logo,

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g\sin\alpha}{3R}\cos(\theta_0 + \Omega t) \qquad (7.3.1)$$

Após isolar x,θ e φ, integramos duas vezes e obtemos as equações do movimento

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t - \frac{2g\sin\alpha}{3\Omega^2}\cos(\theta_0 + \Omega t)$$

$$x = x_0 + \frac{g\sin\alpha}{3\Omega}t - \left[\frac{\omega R}{\Omega} + \frac{g\sin\alpha}{3\Omega^2}\sin(\theta_0 + \Omega t)\right]\cos(\theta_0 + \Omega t)$$

$$y = y_0 + \left[\frac{\omega R}{\Omega} + \frac{g\sin\alpha}{3\Omega^2}\sin(\theta_0 + \Omega t)\right]\sin(\theta_0 + \Omega t)$$

As equações do movimento da moeda rolante em termos de seis constantes arbitrarias $(x_0, y_0, \theta_0, \varphi_0, \omega, \Omega)$.

2. Um cilindro de raio a que rola sem deslizar da posição mais alta sobre um cilindro fixo de raio b. Qual a equação do movimento. Sejam x, y coordenadas cartesianas com origem no centro do cilindro fixo: o eixo x é horizontal e o eixo y é vertical orientado para cima. Seja φ o angulo de rotação do cilindro móvel em torno do seu eixo de simetria.

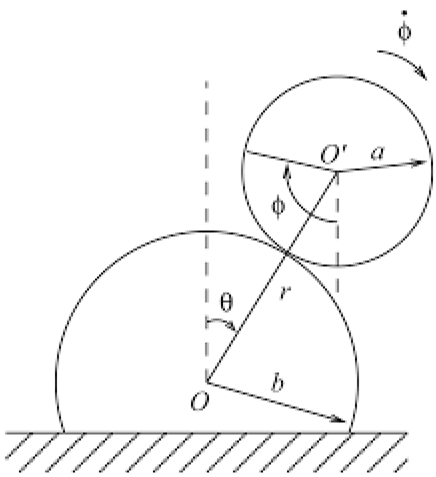

Figura 2-Cilindro rolando sem deslizar sobre cilindro fixo.

Temos que entender que o problema quer saber quando o cilindro móvel deixa o cilindro fixo, primeiro precisamos entender que o cilindro só abandona o cilindro móvel quando a normal é nula e quando a força de contato entre os 2 se reduz a zero.Portanto essas são as minhas restrições. Como os dois estão em contato e R sendo uma coordenada fixa :$r = a + b$.

Temos dois vinculo

1. Vinculo de rolamento sem deslizamento

$$r\dot{\theta} - a\dot{\varphi} \ = 0 \tag{1}$$

Que me diz que a velocidade do centro de massa ($R\dot{\theta}$) para constituir um vinculo é obrigatoriamente igual à velocidade de rotação do cilindro em torno do seu próprio eixo ($a\dot{\varphi}$).

2. Vinculo que obriga os dois cilindros permanecerem em contato.

$$r - (a + b) = 0 \tag{2}$$

Da equação (1) trata-se de um vinculo linear na velocidade e trata-se de EDO exata , portanto trata-se de um vinculo holônomo.Embora se trate de um caso semi-holônomo , como temos vínculos lineares nas velocidades podemos usar o mesmo procedimento do exercício anterior.

Como já temos a equação de vinculo precisamos da lagrangeana do sistema.

$$L = T - V \tag{3}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{ma^2}{4}\dot{\varphi}^2 - mgr\cos\theta \tag{3.1}$$

A energia cinética do cilindro móvel, é a energia associada ao C.M acrescida da energia cinética de rotação do cilindro em torno do próprio eixo.

Resolvendo o lado esquerdo da (4)

Neste caso temos uma equação de vínculo portanto desenvolveremos a equação (2) para cada mesma. Primeiramente temos que nomear as coordenadas generalizadas: $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$.

$$l = 1 \rightarrow equação\ (1)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{3} a_{lk}\,\dot{q_k} = a_{11}\dot{r} + a_{12}\dot{\theta} + a_{13}\dot{\varphi} \ \leftrightarrow\ r\dot{\theta} - a\dot{\varphi} = 0 \tag{3.1.1}$$

Comparando devidamente a equação de vínculo temos os valores das funções arbitrarias a_{lk} .Sendo eles

$$a_{11} = 0$$

$$a_{12} = r$$

$$a_{13} = -a$$

Portanto o lado esquerdo :

$$\sum_{l=1}^{1} a_{lk}\dot{q}_k = \lambda_1 r - \lambda_1 a \tag{3.1.2}$$

$$l = 2 \rightarrow equação\ (2)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{1} a_{lk}\,\dot{q_k} = a_{21}\dot{r} \ \leftrightarrow\ \dot{r} = 0 \tag{3.2.1}$$

Portanto o lado esquerdo :

$$\sum_{l=1}^{1} a_{lk}\dot{q}_k = \lambda_2 \tag{3.2.2}$$

Resolvendo o lado direito (lagrangeana para cada uma das coordenadas generalizadas).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} + mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\ddot{\theta} - mgr\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{ma^2\ddot{\varphi}}{2}$$

Logo,

$$m\ddot{r} + mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda_2 \qquad (3.a)$$

$$mr^2\ddot{\theta} - mgr\sin\theta = \lambda_1 r \qquad (3.b)$$

$$\frac{ma^2\ddot{\varphi}}{2} = -\lambda_1 a \qquad (3.c)$$

$$\dot{r} = 0 \qquad (1.a)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{(a+b)}{a}\ddot{\theta} \qquad (2.a)$$

Somando (3.b) e (3.c), substituindo (2.a) em (3.c). E assim obtemos a equação do movimento:

$$\frac{3m}{2}(a+b)^2 - mg(a+b)\sin\theta \qquad (5)$$

Teríamos o mesmo resultado se tivéssemos observados que se trata de um vinculo semi holônomo e o sistema tem apenas um grau de liberdade representado pela coordenada θ, então se resolvemos as equações de lagrange para esta coordenada, teríamos o mesmo resultado.

** As componentes cartesianas da velocidade podem ser obtidas;

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}[(a+b)\sin\theta] = (a+b)\ddot{\theta}\cos\theta - (a+b)\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}[(a+b)\cos\theta] = -(a+b)\ddot{\theta}\sin\theta - (a+b)\dot{\theta}^2\cos\theta$$

O multiplicador de lagrange aparece com um impulso do vinculo, se necessário depois eu incluo aqui.