1 Curso PIBID: Os Alicerces da Mecânica Clássica

Prof. Sérgio Augusto Carias de Oliveira
Profa. Debora
Profa. Fabiane

2 Princípio Variacional

Um problema histórico e bem interessante, advém da procura por uma função ou curva, através da qual uma determinada quantidade de interesse - em geral uma *integral de ação* - é estacionária. Na mecânica clássica, relatividade geral e teoria quântica de campo diversas técnicas utilizam o *princípio variacional* como ponto de partida na tentativa de *minimizar* ou *maximizar* uma integral funcional. Também na unificação das diversas áres da física, onde a *energia* representa o papel da função que se deseja levar à condição de *extremo*, o método variacional é de grande valia.

A quantidade a ser levada à condição de estacionária geralmente é uma integral de uma *funcional*, uma função cujos próprios argumentos são funções de uma variável paramétrica. Seja J uma funcional de y

$$J\left[y\right]=\int_{x_1}^{x_2} f\left(x,\, y\left(x\right),\, \frac{dy\left(x\right)}{dx}\right)dx. \tag{1}$$

A proposta é achar a curva $y\left(x\right)$ para qual $J\ \left[y\right]$ seja um extremo, (ou um mínimo ou um máximo). Numa linguagem matemática, a condição de extremo para $J\ \left[y\right]$ representa-se como uma integral

$$\delta J=\delta\int_{x_1}^{x_2} f\left(x,\ \ y\left(x\right)\ ,\ \dot{y}\left(x\right)\right)dx=0, \tag{2}$$

onde δJ denomina-se a *variação em* J , $f=f\left(x,\ \ y\ ,\dot{y}\right)$ é a funcional e $\dot{y}\left(x\right)=$

$\frac{dy(x)}{dx}$.

.

$[figura1]$

Introduzindo as equações paramétricas,

$$y\left(x,\alpha\right)=y\left(x,0\right)+\alpha\eta\left(x\right) \tag{3}$$

onde $\eta\left(x\right)$ é qualquer função que se anula nos pontos extremos $\eta\left(x_1\right)=0$ e

$\eta\left(x_2\right)=0$, podemos escrever

$$J\left[y\left(\alpha\right)\right]=\int_{x_1}^{x_2} f\left(x,\quad y\left(x,\alpha\right),\quad \dot{y}\left(x,\alpha\right)\right)dx, \tag{4}$$

e a condição para que J seja estacionária é

$$\left[\frac{\partial J\left(\alpha\right)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha\,=\,0}=0 \tag{5}$$

ou, traduzindo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J\left(\alpha\right)}{\partial\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\alpha}\right]dx\\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta\left(x\right)+\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\frac{d\eta\left(x\right)}{dx}\right]dx\end{aligned} \tag{6}$$

onde usou-se $\frac{\partial y}{\partial\alpha}=\eta\left(x\right)$ e $\frac{\partial\dot{y}}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\dot{y}\left(x,0\right)+\alpha\frac{d\eta(x)}{dx}\right]=\frac{d\eta(x)}{dx}$.

A segunda integral pode ser desenvolvida por partes,

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\frac{d\eta\left(x\right)}{dx}dx &= \left|\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\eta\left(x\right)\right]_{x_1}^{x2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta\left(x\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\right)dx\\ &= -\int_{x_1}^{x_2}\eta\left(x\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\right)dx,\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial J\left(\alpha\right)}{\partial\alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\right)\right]\eta\left(x\right)dx. \tag{7}$$

A arbitrariedade de $\eta\left(x\right)^{(*)}$ nos diz que a condição (5) para que J seja estacionária é

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\right)=0 \tag{8}$$

que é conhecida como *equação de Euler*.

$[figura2]$
$***$

$(*)$ De um modo mais rigoroso, definindo as respectivas variações de J e y,

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = 0} d\alpha, \tag{9}$$

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = 0} d\alpha, \tag{10}$$

após multiplicação de (7) pela diferencial $d\alpha$ e levantar a condição de extremo ficamos com

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right] \delta y \, dx, \tag{11}$$

que conduz para (8), uma vez que δy representa um desvio arbitrário de $y\,(x, \alpha = 0)$ devido a variação do parâmetro α.

2.1 Exemplos

(i) **menor distância entre dois pontos num plano** Como um primeiro

exemplo, *qual a curva que une dois pontos num plano cujo comprimento é o mais curto?*

Neste caso a integral de linha é

$$J\;[y] = \int_{x_1}^{x_2} ds,$$

onde ds é o elemento de arco no plano,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} dx = \sqrt{\left(1 + \dot{y}^2\right)} dx.$$

Temos então

$$J\,[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left(1 + \dot{y}^2\right)} dx,$$

que permite verificar, por comparação com (1), que a funcional é

$$f\left(x,\;\; y\,(x)\;,\; \dot{y}\,(x)\right) = \sqrt{\left(1 + \dot{y}^2\right)}.$$

Com essa f na equação de Euler e levando em conta que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ obtem-se

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{2\dot{y}}{\sqrt{\left(1+\dot{y}^{2}\right)}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\left(1+\dot{y}^{2}\right)}}\right) \doteq 0,$$

o que significa,

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{\left(1+\dot{y}^{2}\right)}} = a \qquad \text{(constante).}$$

Assim, $\dot{y}^{2} = a\left(1+\dot{y}^{2}\right) \implies \dot{y}^{2}\left(1-a\right) = a \therefore$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{a}{(1-a)}} = b \quad \text{(constante).}$$

Integrando esta última equação obtem-se

$$y\left(x\right) = bx + c,$$

que é a *equação da reta.*

(ii) **A braquistócrona** Este problema foi proposto em 1696 por Johann Bernoulli : *qual a trajetória entre dois pontos que uma partícula de massa m sujeita à ação do campo gravitacional segue num tempo mais curto?*

Neste caso como o interesse é no tempo, de $v = \frac{ds}{dt}$ teremos o tempo total de queda

$$J = \int_{a}^{b}\frac{ds}{v} = \int_{0}^{x_b}\frac{\sqrt{\left(1+\dot{y}^{2}\right)}}{v}dx.$$

A velocidade pode ser facilmente determinada já que o campo é conservativo,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^{2} \therefore v = \sqrt{2gy},$$

de modo que

$$J = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{x_b}\sqrt{\frac{\left(1+\dot{y}^{2}\right)}{y}}dx$$

e

$$f\left[x,\ \ y\left(x\right)\ ,\ \dot{y}\left(x\right)\right]=\sqrt{\frac{\left(1+\dot{y}^{2}\right)}{y}} \tag{12}$$

pode agora ser substituida em (8),

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)=0.$$

Com objetivo de simplificar a resolução, considere a quantidade

$$\frac{d}{dx}\left(\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-f\right).$$

Vamos mostrar que em situações em que f *não depende explicitamente de* x tal quantidade é constante. Para verificar, fazendo a operação de derivação

obtemos,

$$\frac{d}{dx}\left(\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-f\right)=\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\ddot{y}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\dot{y}-\frac{df}{dx}.$$

Lembrando que a derivada total de $f\left(x,\ \ y\ ,\ \dot{y}\right)$ é

$$\frac{d}{dx}f\left(x,\ \ y\ ,\ \dot{y}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\ddot{y},$$

e uma vez substituida na expressão acima obtem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-f\right) &= \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\ddot{y}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\dot{y}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\ddot{y}\right)\\ &= \dot{y}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right]-\frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

Identificando a expressão entre colchetes como a própria equação de Euler (8) para f, necessariamente este termo não contribue. Além disso, se f independe explicitamente de x, - como é o caso em consideração -, então $\frac{\partial f}{\partial x}=0$. Como consequência,

$$\frac{d}{dx}\left(\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-f\right)=0,$$

ou seja,

$$\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - f = c \qquad \text{(constante)}, \tag{13}$$

uma relação de extrema importância para nossos futuros propósitos.

Usando (12) e fazendo as respectivas derivações
$\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \left(\dot{y}\right)\frac{\dot{y}}{\sqrt{y\left(1+\dot{y}^2\right)}} = \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{y\left(1+\dot{y}^2\right)}}$, obtem-se

$$\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{y\left(1+\dot{y}^2\right)}} - \sqrt{\frac{\left(1+\dot{y}^2\right)}{y}} = c.$$

ou,

$$\frac{\dot{y}^2 - \sqrt{\left(1+\dot{y}^2\right)}\sqrt{\left(1+\dot{y}^2\right)}}{\sqrt{y\left(1+\dot{y}^2\right)}} = \frac{\dot{y}^2 - 1 - \left(\dot{y}^2\right)}{\sqrt{y\left(1+\dot{y}^2\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{y\left(1+\dot{y}^2\right)}} = c$$

ou ainda, de uma maneira mais conveniente

$$c^2 = \frac{1}{y\left(1+\dot{y}^2\right)} \Longrightarrow y\left(1+\dot{y}^2\right) = \frac{1}{c^2}.$$

A escolha $\frac{1}{c^2} = 2a$ conduz para $y\left(1+\dot{y}^2\right) = 2a$, ou

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

que pode ser diretamente integrada resultando

$$x - x_0 = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}}dy.$$

Uma mudança de variável

$$y = a\left(1-\cos\theta\right) \Longrightarrow dy = asen\theta d\theta$$

conduz para

$\int\sqrt{\frac{y}{2a-y}}dy = \int\sqrt{\frac{a(1-\cos\theta)}{2a-a(1-\cos\theta)}}d\theta = a\int\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}\left(\sin\theta d\theta\right) = a\int\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)}}d\theta =$
$a\int\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}d\theta = a\int\left(1-\cos\theta\right)d\theta = 2a\int sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta^{(*)}$
$= 2a\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\theta}{2}\right) = a\left(\theta-\sin\theta\right)$, e finalmente

$$\begin{aligned} x - x_0 &= a\left(\theta-\sin\theta\right) \\ y &= a\left(1-\cos\theta\right) \end{aligned}$$

que são as equações paramétricas da *cicloide.*

A braquistócrona, publicada por *Johann Bernoulli* em 1696 são portanto cicloides geradas pelo movimento de um ponto fixo na circunferência de um círculo de raio $a = \frac{1}{2c^2}$, rolando sem deslizar e partindo de um ponto x_0 no eixo $y = 0$.

$(*)\int\sin^2\left(\alpha x\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{sen(2\alpha x)}{4\alpha}$

$[Fala\ da\ rapaziada]$

Funções de multivariaveis Pode-se extender a mesma técnica para a *funcional multivariável* $f = f\left(x,\, y_1,\, y_2,\, ..., y_n,\, \dot{y_1}, \dot{y_2}, ...,\, \dot{y_n}\right)$ e

$$J\left[y\right] = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x,\, y_1,\, y_2,\, ..., y_n,\, \dot{y_1}, \dot{y_2}, ...,\, \dot{y_n}\right)dx, \tag{14}$$

que conduz para uma série de n equações para as variáveis independentes

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y_i}}\right) = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{15}$$

Se f não depende explicitamente da variável x, novamente poderemos identificar a quantidade

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{y}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} - f = \texttt{constante} \tag{16}$$

e tentar resolver o problema usando equações de primeira ordem.

2.2 Aplicações na Mecânica Clássica

De uma maneira algo que audaciosa mas com fins ilustrativos, podemos agora partir para nosso principal objetivo ou seja, extender as técnicas desenvolvidas na seção anterior para sistemas mecânicos.

Vamos considerar um hiperespaço de N *coordenadas generalizadas* $q_i(t)'s$, $i = 1, 2, ..., N$ que configuram um determinado sitema mecânico;

Definimos a *funcional de Lagrange, ou lagrangeana,* como

$$L\left(q_i, \dot{q}_i t\right) = T\left(q_i, \dot{q}_i\right) - V\ (q_i, t) \tag{17}$$

onde $T\left(q_i, \dot{q}_i\right)$ é a energia cinética e $V(q_i, t)$ a função potencial e usamos a versão de um princípio variacional : -

O princípio de Hamilton "O movimento de um sistema mecânico segue a trajetória na qual a *integral da ação*

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt, \tag{18}$$

é extrema ".

Fazendo as transformações

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & t\,, \\ y_i & \longrightarrow & q_i\,, \\ \dot{y}_i & \longrightarrow & \dot{q}_i, \end{array}$$

o procedimento que leva (18) à condição de extremo conduz para a série de n

equações

$$\delta J = 0 \quad \Rrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{19}$$

denominadas *equações de Lagrange* $(EL)^{(**)}$ do movimento. Elas formam uma

série de n equações diferenciais de segunda ordem, cada uma para seu respectivo q_i, com as respectivas condições iniciais, que descrevem o movimento de um sistema mecânico conservativo.

$(**)$ Historicamente as (EL) foram obtidas de uma maneira diferente, (usando o princípio de D'Alembert). Aqui nossa intenção é ilustrar como estas equações podem ser obtidas, para sistemas conservativos, diretamente do princípio variacional.

Considerando a derivada temporal da lagrangeana,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L\left(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t\right) &= \frac{\partial L}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial L}{\partial q_n}\dot{q}_n + \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_1\right) + ... + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_n\right) + \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d}{dt}L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t},$$

ou ainda, usando as equações de Lagrange (19)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Isto pode ser colocado na forma

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{20}$$

Observando em (17) que a dependencia de L em t vem do termo de energia potencial. Se o sistema é conservativo, a energia potencial independe explícitamente do parâmetro variacional (o tempo), portanto $V = V(q_i)$, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, e,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{21}$$

Como consequência

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \texttt{constante} \equiv h\left(q_i, \dot{q}_i\right), \tag{22}$$

onde $h\left(q_i, \dot{q}_i\right)$ é uma *constante de movimento ou primeira integral*, equivalente àquela quantidade (16) discutida na seção anterior.

Matematicamente, uma constante de movimento de um sistema mecânico, é uma função $f\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$, dependente das variáveis dinâmicas, coordenadas e velocidades generalizadas e possivelmente do tempo e que permanesce constante na evolução temporal, isto é $\frac{df}{dt} = 0$.

Uma interpretação conveniente para h segue da investigação de (22), juntamente com (17). Novamente, a restrição para sistemas conservativos implica na dependencia da Lagrangeana na variável $\dot{q}_i$, apenas através do termo de energia cinética $T\left(q_i, \dot{q}_i\right)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \tag{23}$$

Primeiramente vamos expressar $T\left(q_i, \dot{q}_i\right)$ em coordenadas generalizadas

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2 \tag{24}$$

e, desde que

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right) \tag{25}$$

teremos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \\ &= \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

de modo que substituindo em (24)

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\sum_{j,k}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_j\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_j + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2\right] \\
&= T_0 + \sum_j T_j\dot{q}_j + \sum_{j,k} T_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (26)
\end{aligned}
$$

onde chamou-se

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2 \\
T_j &= \sum_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right) \\
T_{jk} &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right).
\end{aligned}
$$

Vê-se então em (26), que a expressão para a energia cinética em coordenadas generalizadas consiste de três termos. O primeiro T_0, independente da velocidade generalizada; um termo $T_j\dot{q}_j$ de primeira ordem nesta variável e um termo quadrático $T_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$nestas mesmas variáveis. Se as equações de transformações (25) não dependem explicitamente no tempo, então $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$, e nesta caso os dois primeiros termos de (26) não contribuem. Na grande maioria das situações, T é uma função homogênea de segunda ordem, ou quadrática, nas velocidades generalizadas

$$
T = \sum_{l,m} T_{lm}\dot{q}_l\dot{q}_m. \qquad (27)
$$

Levando agora esta expressão em (23) obtem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{l,m}\left[T_{lm}\left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_m + T_{lm}\left(\frac{\partial \dot{q}_m}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_l\right] \\
&= \sum_{l,m}\left[T_{lm}\delta_{lj}\dot{q}_m + T_{lm}\delta_{mj}\dot{q}_l\right] \\
&= \sum_m T_{jm}\dot{q}_m + \sum_l T_{lj}\dot{q}_l
\end{aligned}
$$

e, com este resultado em (22), levando em conta (23), obtem-se

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L &= \sum_{j,m} T_{jm}\dot{q}_m\dot{q}_j + \sum_{j,l} T_{lj}\dot{q}_l\dot{q}_j - L \\ &= 2T - L = 2T - (T - V) \\ &= T + V = E.\end{aligned}$$

Vemos então, que nossa constante de movimento (22)

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = T + V \equiv h \doteq E, \tag{28}$$

é a *energia total* do sistema. Na literatura, algumas vezes $h\left(q_i, \dot{q}_i\right)$ é denominada *função energia.*

Resumindo, uma vez escolhidas as coordenadas generalizadas e obtida a funcional Lagrangeana, parte-se para o conjunto de equações (19) , decorrentes do processo da variação da integral da ação (18) na condição de extremo. Além disso, se a lagrangeana L independe explicitamente do tempo, a equação (22) é uma *primeira integral.*

Vejamos alguns exemplos ilustrativos:

(i) - *considere problema 3D de uma partícula movedo-se num potencial arbitrário* $V = V(x, y, z)$.

Primeiramente vamos escolher as coordenadas genaralizadas correspondentes aos três graus de liberdade:

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y, \qquad q_3 = z,$$

A energia cinética é $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$, de modo que a lagrangeana é

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r).$$

Tem-se então as três (19)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \quad\Longrightarrow m\dot{x}^{2}+\frac{\partial V}{\partial x}=0\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \quad\Longrightarrow m\dot{y}^{2}+\frac{\partial V}{\partial y}=0\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \quad\Longrightarrow m\dot{z}^{2}+\frac{\partial V}{\partial z}=0
\end{aligned}$$

ou

$$m\dot{\mathbf{r}}^{2}=-\nabla V=\mathbf{F},$$

que é a *Lei de Newton* como esperávamos.

Note que para (22) resulta

$$\begin{aligned}
\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L &= m\dot{x}^{2}+m\dot{y}^{2}+m\dot{z}^{2}-\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\dot{z}^{2}\right)-V\left(r\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\dot{z}^{2}\right)+V\left(r\right)=T+V\left(r\right)\equiv E,
\end{aligned}$$

que é a *energia total.*

(i) - *como exercício, descreva o movimento de uma partícula movendo-se no plano, sujeita a um potencial que só depende da coordenada radial,* $V=V\left(r\right).$

* * *

2.3 Tratamento com Vínculos - *os multiplicadores de Lagrange*

Para o tratamento com vínculos, algumas definições serão necessárias.

Vinculos, são limitações ou restrições para o movimento do sistema. Quando tais restrições são expressadas matematicamente através de equações que conectam as coordenadas generalizadas do sistema q_i $(i=1,...,n$), e o tempo, tipicamente,

$$f = f\ (q_1, q_2, ..., q_n\ , t) = 0, \tag{29}$$

elas são denominadas *vínculos holonômicos.*

Exemplos de vínculos holonômicos e de relações do tipo (29) são, a distância entre dois pontos $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}_j$ em um corpo rígido,

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| - r_{ij} = 0,$$

ou a restrição de *não deslizar,* no movimento de uma disco rolando sôbre um plano inclinado,

$$r - a\,\theta = 0.$$

Algumas vezes acontecem relações do tipo

$$g\ \left(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t\right) = 0, \tag{30}$$

dependentes de coordenadas e velocidades generalizadas que, por não obedecerem a forma (29), sâo vínculos *não- holonômicos.* Entretanto, se a forma equivalente

$$\begin{aligned} dg &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) d\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i\ d\dot{q}_i + f_t\ dt = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

é uma *diferencial exata*, tais vínculos costumam ser denominados *vínculos semi - holonômico.* Nossa intensão agora, é extender o princípio de Hamilton para o tratamento destes tipos de vínculos.

Suponha que existam m equações de vínculos do tipo

$$f_l = f_l \left(q_1, q_2, ...,\ q_n\ , \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t\right) = 0, \qquad l = 1, 2, ...m. \tag{32}$$

Isto quer dizer que o número de graus de liberdade independentes agora é $n - m$. Uma descrição destes graus de liberdade via correspondentes equações (19) não descrevem os vínculos. Entretanto, como um artifício de cálculo pode-se introduzir a quantidade identicamente nula

$$\sum_{l=1}^{m} \lambda_l \; f_l = 0, \tag{33}$$

onde λ_l é um fator multiplicador desconhecido, na variação da integral da ação,

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[L + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \; f_l \right] dt = 0, \tag{34}$$

e, com o procedimento usual, tratando os $(m+n)$ graus de liberdade como independentes, coduzir até

$$\delta J = 0 \qquad \Rrightarrow \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \; f_l \right) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(L + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \; f_l \right) \right] \right\} \delta\, q_i \, dt = 0. \tag{35}$$

Os coeficientes λ_l's são denominados *multiplicadores indeterminados de Lagrange* e podem ter a forma geral $\lambda_l = \lambda_l \left(q_1, q_2, ..., q_n \,, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t \right)$. Por simplicidade, considerando $\lambda_l = \lambda_l \,(t)$, obtem-se as n equações para os q_i's,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{36}$$

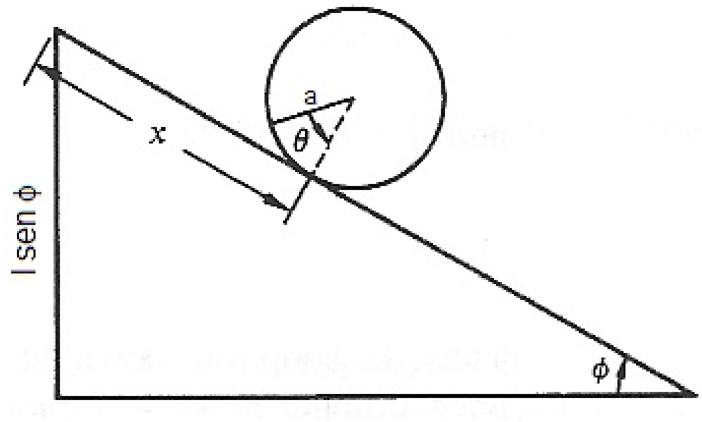
onde

$$Q_i = \sum_{l} \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] - \frac{d\,\lambda_l}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \right\}, \tag{37}$$

que juntamente com (**??**) formam o conjunto *das* $(m+n)$ *equações* que resolvem o problema, incluindo as informações sobre os vínculos.

Exercício: (*Disco rolando num plano inclinado)*

Figura : disco rolando num plano inclinado de comprimento l



Como vimos em sala, as equações de movimento correspondentes às coordenadas x e θ são

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_\theta \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} Q_x &= \lambda\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right], \\ Q_\theta &= \lambda\left[\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}\right)\right], \end{aligned}$$

onde somente um multiplicador λ é necessário à equação de vínculo

$$dx = ad\theta, \Longrightarrow f = x - a\theta = 0.$$

Temos então, três equações para as três variáveis x , θ e λ.

A lagrangeana $L = T - V$ é

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}Ma^2\dot{\theta}^2 - Mg\,(l - x)\,sen\phi,$$

sendo a energia cinética composta de duas partes: - *uma correspondente ao movimento de translação* $\frac{1}{2}M\dot{x}^2$, *outra correspondente ao movimento de rotação*

$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ *com* $I = \frac{Ma^2}{2}$ -, e a energia potencial ´$V = Mglsen\phi - Mgxsen\phi = Mg\,(l-x)\,sen\phi$, (veja a figura).

Agora vocês continuam até obter,

$$\texttt{Resp.}\begin{cases} \ddot{x} = \frac{2}{3}\,g\,sen\phi \\ \ddot{\theta} = \frac{2}{3}\,\frac{g\,sen\phi}{a} \\ \lambda = \frac{1}{3}Mg\,sen\phi \text{ (força de vínculo)}. \end{cases}$$

***

Considerando agora, como uma equação de *vínculo semi-holonômico,* do tipo $g = g\left(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n\right) = 0$,

$$\dot{x} = a\dot{\theta} \therefore g = \dot{x} - a\dot{\theta} = 0.$$

As equações de movimento são

$$\begin{aligned} Q_x &= \lambda\left[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right] - \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}, \\ Q_\theta &= \lambda\left[\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\theta}}\right)\right] - \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \dot{\theta}}, \end{aligned}$$

e como os termos entre colchêtes não contribuem,

$$\begin{aligned} Q_x &= -\dot{\lambda} \\ Q_\theta &= \dot{\lambda}a \end{aligned}$$

$$M\ddot{x} - Mg\sin\phi = -\dot{\lambda} \tag{38}$$

$$\frac{Ma\ddot{\theta}}{2} = \dot{\lambda} \tag{39}$$

$$\dot{x} - a\dot{\theta} = 0 \tag{40}$$

Diferenciando (40)

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{a}, \tag{41}$$

e substituindo em (39)

$$\dot{\lambda} = \frac{M\ddot{x}}{2}. \tag{42}$$

Substituindo (42) em (38)

$$M\ddot{x} - Mg\sin\phi = -\frac{M\ddot{x}}{2}$$

ou,

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\phi,$$
$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3a}g\sin\phi,$$

e, por (41) ,a força de vínculo agora é dada por

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{3}Mg\sin\phi.$$

Neste caso o *multiplicador de Lagrange* λ aparece como um *impulso de vínculo.*

Disto pode-se concluir que o princípio de Hamilton pode ser extendido para o tratamento com vínculos não holonômicos, usando (**??**), sendo que para o caso semi-holonômico, o termo entre colchêtes é descartado.

De maneira mais geral, pode-se escrever (**??**) na forma mais compacta e conveniente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \ k_{l\,j}, \tag{43}$$

onde

$$k_{l\,j} = \frac{\partial f_l}{\partial q_j} - \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}_j} \tag{44}$$

e

$$k_l = f_l \ (q_1, q_2, ..., \ q_n) - g_l \ \left(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n\right). \tag{45}$$

* * *

(i) −Fala da Endi

(ii) - *considere problema de uma partícula vinculada a mover-se na superfície de uma esfera. (Guilherme)* ($\mathfrak{Gui}/\mathfrak{Ju}/\mathfrak{Fa}_1/\mathfrak{Fa}_2$)

* * *

2.4 Princípios de Invariancia e Teorema de Noether